Δείξτε ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει, και στη συνέχεια υπολογίστε το "απειρό" άθροισμα. (απάντηση Σ=1)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}(\nu+1)+\nu\sqrt{\nu+1}}$$

ΛΥΣΗ

Η σειρά συγκλίνει εύκολα από κρίτηριο λόγου του D' Alembert. Τώρα υπολογίζουμε κάνοντας το άθροισμα τηλεσκοπικό, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\kappa}\,(\kappa+1)+\kappa\sqrt{\kappa+1}} &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\kappa}\cdot\sqrt{\kappa+1}\left(\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}\right)} \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa}\sqrt{\kappa+1}} \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}-\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\right) \\
&= 1-\lim_{\kappa\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\kappa+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\text{Arctan v}}{\nu^2} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| (-1)^{\nu} \frac{\text{Arctan v}}{\nu^2} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\text{Arctan v}}{\nu^2} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{Arctan v}}{\nu^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < +\infty.$$

$+\infty$

Άρα συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει και κανονικά.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu}$$ Συγκλίνει ή απειρίζεται θετικά?

ΛΥΣΗ

Απειρίζεται διότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων, δεν είναι μηδενική:

$$\lim\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu}=\lim\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]=e^{-1}e=1\neq 0$$

Να δείξετε ότι το παρακάτω απειρό άθροισμα συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad n > 1$$

Η συνάρτηση που ορίζεται με αυτό τον τρόπο καλείται συνάρτηση ζ του Riemann και συγκλίνει όταν Re(k)>1. (πληροφοριακά).
Υπόδειξη: α) Δείξτε ότι η ακολουθία μέσα στη σειρά είναι ακολουθία Cauchy ή
β) χρησιμοποιείστε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

ΛΥΣΗ

Προφανώς, η σειρά συγκλίνει αφού εφαρμόζοντας το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^k} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{nk}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-nk} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-k)}, \quad 1 - k < 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{bn}}, \quad b = 1 - k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{bn} < +\infty
\end{aligned}$$

Να αποδείξετε ότι για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu-(-1)^{\nu}}$ το κριτήριο πηλίκων του D'Alember δεν εφαρμόζεται, ενώ το κριτήριο της ν-οστής ρίζας του Cauchy εφαρμόζεται. Ποιά είναι η απάντηση;

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-(-1)^{\nu}}$$

Λύση

Όπου βλέπουμε την ακολουθία $(-1)^{\nu}$ πάντα σκεφτόμαστε τις υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων. Θα δείξουμε μάλιστα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της νιοστής ρίζας του Cauchy ότι η σειρά απειρίζεται, ενώ ότι το κριτήριο D' Alembert δε δίνει απάντηση.

- $\nu = 2\kappa \Rightarrow \lim \frac{a_{2K+1}}{a_{2K}} = \lim \frac{2^{2K+2}}{2^{2K}\,2^{-1}} = 8$
- $\nu = 2\kappa - 1 \Rightarrow \lim \frac{a_{2K}}{a_{2K-1}} = \lim \frac{2^{2K-1}}{2^{2\nu}} = \frac{1}{2}$

Οπότε το κριτήριο D' Alembert δε μας δίνει λύση.

Τώρα εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία για το κριτήριο νιοστής ρίζας του Cauchy , και βγάζουμε ότι το όριο αυτό είναι 2. Άρα η σειρά απειρίζεται θετικά από το κριτήριο Cauchy.